XXVI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2019

3 февраля

10 класс

1. В момент каждого противостояния астероида земной наблюдатель измеряет его видимую звездную величину. Период обращения астероида равен 3.9 года. Оцените эксцентриситет его орбиты, если амплитуда изменения видимой звездной величины составляет 2.5^m. Орбиту Земли считаем круговой.

Решение:

Из третьего закона Кеплера в применении к Солнечной системе оценим большую полуось орбиты астероида. Воспользуемся системой единиц измерения, в которой будем выражать расстояния в астрономических единицах, а время — в годах, тогда $T^2 = a^3$, $a = T^{2/3} = \sqrt[3]{15.21} \approx 2.5$ а.е.

По формуле Погсона оценим, во сколько раз меняется освещенность, создаваемая астероидом для наблюдателя на Земле:

$$\Delta m = 2.5 \lg \frac{E_{\max}}{E_{\min}} \Rightarrow \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = 10.$$

Освещенность в данном случае зависит не только от расстояния астероида от Солнца, но и от расстояния между наблюдателем и астероидом. Пусть e — эксцентриситет орбиты астероида, R — его радиус. Тогда освещенности, создаваемые астероидом в перигелии и афелии орбиты для земного наблюдателя, равны

$$E_\pi = \frac{L_\odot}{4\pi(a\cdot(1-e))^2}\pi R^2 \frac{1}{2\pi\big(a(1-e)-a_\oplus\big)^2}, \quad E_\alpha = \frac{L_\odot}{4\pi(a\cdot(1+e))^2}\pi R^2 \frac{1}{2\pi\big(a(1+e)-a_\oplus\big)^2}.$$

Отношение освещенностей равно

$$\frac{E_\pi}{E_\alpha} = \frac{(a\cdot(1+e))^2}{(a\cdot(1-e))^2}\cdot\frac{\big(a(1+e)-a_\oplus\big)^2}{\big(a(1-e)-a_\oplus\big)^2} = \left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{a(1+e)-a_\oplus}{a(1-e)-a_\oplus}\right)^2.$$

При выражении расстояний в астрономических единицах $a_\oplus = 1$, тогда

$$\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{a(1+e)-1}{a(1-e)-1} = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{a(1+e)^2-1-e}{a(1-e)^2-1+e} = \sqrt{10}.$$

В итоге получается квадратное уравнение на эксцентриситет:

$$e^2 a\left(1-\sqrt{10}\right) + e(2a-1)\left(1+\sqrt{10}\right) + (a-1)\left(1-\sqrt{10}\right) = 0.$$

Его численное решение сильно упростится (и при этом ответ слабо изменится), если мы учтем, что $\sqrt{10} \approx 3$. Тогда, подставляя числа, получаем, что требуется решить уравнение $5e^2 - 16e + 3 = 0$, корни которого $e_1 = 0.2$, $e_2 = 3$. Геометрически осмысленным является только первый корень, это и есть ответ задачи. Отметим, что «честное» численное решение (без каких-либо округлений) даст ответ $0.20818\ldots$, что мало отличается от полученного нами.

А.В.Веселова

2. В 2013 году АМС Voyager 1 записала «звуки космоса» — магнитозвуковые волны в плазме, частота которых оказалась равной примерно 2–3 кГц. Считая, что с такой же частотой менялось давление газа в окрестности АМС, оцените наименьшие возможные характерные размеры областей повышенной плотности в газе, в котором находилась станция.

Решение:

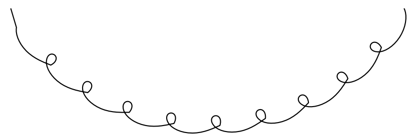
Изменение давления газа рядом с АМС может происходить как из-за прохождения волн в газе, в котором движется аппарат, так и просто из-за перепада плотностей газа, в котором происходит движение. Первая интерпретация «звуков космоса» не позволяет получить искомую оценку, поскольку волны могут распространяться и во в среднем однородной среде, а вот предположение, что АМС просто «сталкивается» с областями повышенной плотности, позволяет вычислить результат. В самом деле, из условия следует, что подобные столкновения происходят несколько тысяч раз в секунду. Аппарат движется со скоростью порядка 10^1 км/с (нас интересует только порядковая точность, поэтому такой оценкой скорости вполне можно ограничиться), следовательно, между двумя последовательными столкновениями он пролетает расстояние порядка штук метров, и это и есть искомая оценка. Заметим, что возможным движением газа относительно Солнца (приводящим к поправке, аналогичной эффекту Допплера) для порядковой оценки можно пренебречь — характерные скорости движения газа сравнимы со скоростью движения АМС, тем самым порядковая оценка результата не изменится.

П.А.Тараканов

3. Докажите, что проекция траектории движения Луны относительно Солнца на плоскость эклиптики не имеет самопересечений и везде выпукла наружу.

Решение:

Попробуем рассуждать от противного. Если траектория имеет самопересечения, т.е. выглядит как-то примерно так:



то это означает, что существуют участки (например, посередине «петелек»), когда скорость Луны направлена в обратную сторону по сравнению с основным участком траектории. Каким образом может возникнуть подобная ситуация?

Как известно, Земля движется вокруг Солнца со скоростью около 30 км/с (если это неизвестно, то орбитальную скорость легко вычислить, зная продолжительность года и радиус орбиты Земли). Луна относительно Земли движется со скоростью около 1 км/с (что также можно вычислить, зная расстояние до Луны и продолжительность месяца). Поскольку скорость Луны относительно Солнца — векторная сумма двух указанных, очевидно, что ее направление практически не меняется, Луна движется вокруг Солнца то чуть быстрее, то чуть медленнее, но никогда не начинает двигаться обратно, а это означает, что наше исходное предположение ложно.

Аналогичным образом докажем и второе утверждение. Ускорение, действующее на Луну в некоторой точке ее траектории, можно разложить на две компоненты — касательную (отвечающую за изменение модуля скорости) и нормальную (перпендикулярную к вектору скорости и отвечающую за его поворот). Если траектория Луны где-либо выпукла внутрь (т.е. в сторону Солнца), то это означает, что в этом месте нормальная компонента ускорения направлена от Солнца. Поскольку движение Луны определяется силами гравитации со стороны Земли и Солнца, получаем, что в подобной ситуации Луна должна находиться где-то между Землей и Солнцем, причем Земля должна притягивать Луну к себе сильнее, чем Солнце.

Осталось либо вспомнить как известный факт, либо вычислить, что сила притяжения Луны Солнцем примерно в два раза больше, чем сила притяжения ее же Землей (причем орбита Луны вокруг Земли, хотя и не является окружностью, не настолько вытянута, чтобы это соотношение могло качественно измениться), а это означает, что и предположение о выпуклости траектории внутрь приводит к противоречию.

П.А.Тараканов

4. Звездолет подлетел к звезде главной последовательности и вышел на круговую орбиту с радиусом 0.5 а.е. и периодом обращения 0.25 года. На звездолете установлена ловушка для вещества, собирающая частицы звездного ветра с площади 1 м^2 и запасающая их кинетическую энергию. Также звездолет с помощью солнечных батарей площади 2 м^2 запасает энергию излучения звезды с эффективностью 30%. Известно, что звезда ежегодно теряет 10^{-14} собственной массы в виде звездного ветра, движущегося со скоростью около $4 \cdot 10^2$ км/с. Во сколько раз запасаемая энергия излучения превосходит запасаемую энергию частиц звездного ветра?

Решение:

Определим массу звезды по 3-му закону Кеплера, выражая период обращения в годах, радиус орбиты — в астрономических единицах, а массу звезды — в массах Солнца:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{1}{M} \implies M = \frac{a^3}{T^2} = \frac{0.5^3}{0.25^2} = 2.$$

Тогда за год звезда теряет $2 \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 10^{-14} = 4 \cdot 10^{16}$ кг своего вещества, а за секунду $4 \cdot 10^{16}/(3.16 \cdot 10^7) = 1.3 \cdot 10^9$ кг. Определим массу вещества, которая за секунду попадает в ловушку. Испущенные за 1 секунду частицы на расстоянии орбиты располагаются в сферической оболочке со средним радиусом 0.5 а.е. и толщиной $v \cdot 1$ с $= 400$ км. Тогда на 1 м^2 за секунду приходится масса, равная

$$\mu = \frac{1.3 \cdot 10^9 \text{ кг}}{4\pi(0.5 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \text{ м})^2} = 1.8 \cdot 10^{-14} \text{ кг}.$$

Кинетическая энергия таких частиц равна

$$E_k = \frac{\mu v^2}{2} = 1.8 \cdot 10^{-14} \cdot (4 \cdot 10^5)^2/2 = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Светимость пропорциональна массе в 4 степени для звезд главной последовательности с массой порядка солнечной, поэтому данная звезда обладает светимостью около $16L_\odot$. Сопоставим освещенность, получаемую космическим кораблем, с солнечной постоянной для Земли:

$$\frac{E}{E_\oplus} = \frac{\frac{L}{4\pi a^2}}{\frac{L_\odot}{4\pi a_\oplus^2}} = 64.$$

Величина солнечной постоянной около $1.4 \cdot 10^3$ Вт/м^2, следовательно, освещенность от звезды составляет около $9 \cdot 10^4$ Вт/м^2. Следовательно, за 1 секунду с учетом эффективности поглощения корабль получает $9 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 0.3 = 5.4 \cdot 10^4$ Дж энергии, что превосходит запасаемую энергию частиц в $5.4 \cdot 10^4/(1.4 \cdot 10^{-3}) \approx 4 \cdot 10^7$ раз.

А.В.Веселова, В.Ш.Шайдулин

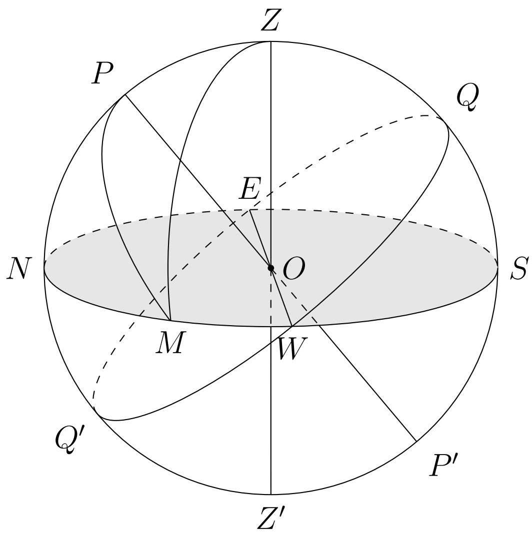
5. Любитель астрономии без телескопа видит на небе две ярких звезды. Прикидывая угловое расстояние между ними, он обнаружил, что между этими двумя звездами не могут поместиться четыре сжатых пальца одной вытянутой руки. Кроме этого, известно, что первая звезда имеет модуль эклиптической широты, равный 10°, а азимут захода второй звезды в Петербурге составляет 160°. Какая из этих звезд ярче? Рефракцией пренебречь.

Решение:

Предположим, что раз не могут поместиться четыре пальца, то три — могут. Если рассчитать угловой размер трех пальцев вытянутой руки, то получится около 5°–7° (руки у всех немного отличаются, но на ответ это не влияет).

Судя по эклиптической широте, мы имеем дело со звездами одного зодиакального созвездия или двух соседних: максимальное расстояние второй звезды от эклиптики составляет не более 15°.

Информацию об азимуте захода второй звезды используем следующим образом. Построим сферический треугольник с вершинами в северном Полюсе Мира P, зените Z и точке захода звезды M. Тогда $PZ = 90° - \varphi = 30°$ (широта Санкт-Петербурга равна $\varphi = 60°$); $ZM = 90°$, так как это заход звезды, а рефракцией мы пренебрегаем; $\angle PZM = 180° - 160° = 20°$; $PM = 90° - \delta_2$, где δ_2 — склонение второй звезды.



Запишем сферическую теорему косинусов для полученного треугольника:

$$\cos PM = \cos ZM \cos PZ + \sin ZM \sin PZ \cos \angle PZM$$

$$\sin \delta = \cos 90° \cos 30° + \sin 90° \sin 30° \cos 20°$$

$$\sin \delta_2 = \frac{1}{2} \cos 20° \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(20/57.3)^2}{2}\right) \Rightarrow \sin \delta_2 \approx \frac{17}{36}$$

Получаем оценку склонения второй звезды: $\delta_2 \lesssim 30°$.

Итого мы имеем три пояса небесной сферы, в которых эти две звезды находятся: пояс по склонению $\delta \in [25°; 35°]$ и два пояса с эклиптической широтой: $\beta_+ \in [5°; 15°]$ и $\beta_- \in [-15°; -5°]$. Далее можно нарисовать эти пояса или вспомнить что и где примерно располагается. Отсюда становится понятно, что пояс β_- нас не интересует, т.к. он не пересекается с поясом склонений. Далее заметим, что область пересечения β_+ и пояса склонений расположена в районе точки летнего солнцестояния, и отсюда сделаем вывод, что речь идет о двух звездах, принадлежащих либо созвездию Близнецов, либо созвездию Тельца.

Вообще говоря, вместо приведенного выше рассуждения можно использовать и другое, менее строгое. Поскольку звезды находятся недалеко друг от друга, а у одной из них эклиптическая широта не слишком сильно отличается от нуля, звезды, по-видимому, относятся к зодиакальным созвездиям. Точка захода одной из них в Петербурге близка к точке севера (азимут захода 160°), а это означает, что склонение этой звезды положительно и заметно отличается от нуля. Следовательно, искать подходящие звезды надо в созвездиях, находящихся в районе точки летнего солнцестояния.

Две яркие рядом стоящие звезды (помним про 5°–7°) есть лишь в Близнецах (а также и пересечение получается восточнее точки летнего солнцестояния), значит, речь идет о Касторе (первая звезда) и Поллуксе (вторая звезда, в отличие от Кастора, как раз может зайти в Петербурге). Поллукс — β *Gem*, и он ярче, чем α *Gem*.

В.В.Григорьев